

ASPECTOS MATEMATICOS DE ALGUNOS METODOS NUMERICOS EN MECANICA DE FLUIDOS: EL PROBLEMA INCOMPRESIBLE DE NAVIER-STOKES

E. FERNANDEZ CARA

y

M. MARIN BELTRAN

*Dpto. Ecuaciones Funcionales. Facultad de Matemáticas
c/ Tarfia, s/n 41012 Sevilla*

*Cátedra de Matemáticas. Facultad de Ciencias
c/ San Alberto, s/n 14071 Córdoba*

RESUMEN

El objetivo de este estudio ha sido la obtención de propiedades de convergencia y estabilidad para dos esquemas numéricos que permiten resolver las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes. Dichos esquemas han sido obtenidos modificando ligeramente otros debidos a R. Glowinski, cuya convergencia no había sido estudiada hasta la fecha. En una primera etapa, se usan métodos de direcciones alternadas del tipo de Peaceman-Rachford y de Strang. Esto reduce el problema a la resolución de problemas elípticos lineales del tipo de Stokes y problemas elípticos quasi-lineales. En la segunda etapa, estos problemas se resuelven numéricamente usando varios métodos de aproximación en espacio (elementos finitos), (para los problemas no lineales es conveniente introducir una formulación de tipo mínimos cuadrados). La convergencia de las soluciones aproximadas hacia la solución del problema inicial se verifica bajo ciertas condiciones específicas de estabilidad. Las propiedades obtenidas vienen a justificar los buenos resultados numéricos conseguidos utilizando los métodos de Glowinski.

SUMMARY

The goal of this paper is to describe some stability and convergence properties for two numerical schemes which can be used to solve the incompressible time-dependent Navier-Stokes equations. The schemes were derived by modifying slightly others, due to R. Glowinski, for which convergence had not still been proven. At a first stage, alternating direction time-discretization methods of Peaceman-Rachford and Strang types have been introduced. This reduces the task to the solution of a sequence of (stationary) elliptic subproblems, some of them linear (quasi-Stokes problems) and some quasi-linear. Then, these are solved using FEMs for the nonlinear sub-problems, it is appropriate to introduce a least-squares reformulation). Under certain specific stability conditions, we establish a convergence result for the computed solutions. This justifies rigorously the fact that Glowinski's methods have provided excellent numerical results.

Recibido: Diciembre 1986

INTRODUCCION

Las ecuaciones de Navier-Stokes, objeto de nuestro trabajo, tienen su origen en la Mecánica de Fluidos y juegan un papel muy importante en numerosos campos de la Ciencia y la Ingeniería. Por ello, no sólo nos interesa estudiar diferentes aspectos cualitativos sino también cuantitativos, de sus soluciones.

Entre sus muchas aplicaciones, citaremos a modo de ejemplo, la determinación del campo de velocidades de un fluido viscoso que se mueve en el interior de un canal en el cual existe un escalón. (Fig. 1 a 3).

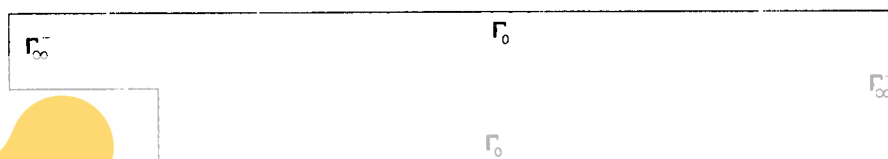


Figura 1. La geometría del escalón. Las condiciones de contorno son:
a) Fluido de Poiseuille sobre Γ_{∞}^- ; b) Condición de no deslizamiento sobre Γ_0 ;
c) Tracción nula (condición natural) sobre Γ_{∞}^+ .

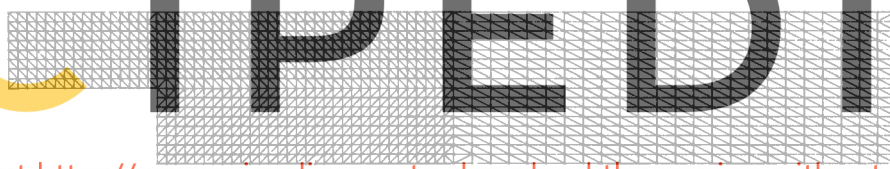


Figura 2. La triangulación utilizada (técnica MODULEF; elemento finito de Thomasset, P_1 —no conforme, base con divergencia nula).

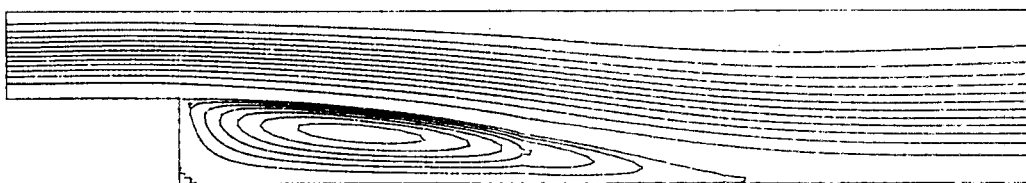


Figura 3. Visualización de algunas líneas de corriente (cálculos realizados utilizando la Biblioteca MODULEF). Valor del número de Reynolds: 190.

Vemos como se aprecian dos zonas bien diferenciadas; en la zona situada entre la entrada del canal y el escalón, el flujo transcurre en régimen laminar, debido a la presencia de una vorticidad prácticamente nula (el campo de velocidades posee perfil parabólico); existe una segunda zona en donde el fluido tiende a “rellenar el vacío” originado por el escalón, creándose un torbellino. Las dimensiones de dicho torbellino dependerán de la altura del escalón, la velocidad de llegada del fluido y la viscosidad del mismo.

Nuestro objetivo va a ser pues, calcular el campo de velocidades de un fluido en movimiento.

Denotemos por $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,t)$ la velocidad del fluido en $\Omega \times (0,T)$, siendo Ω la región ocupada por el fluido (Ω es un abierto acotado de R^n , con $n=2$ ó 3 en la práctica) y $[0,T]$ el intervalo de tiempo considerado. Sea $p=p(x,t)$ la presión del fluido. Con estas notaciones, el movimiento de un fluido viscoso (de viscosidad cinemática ν), i.e. cuyas partículas están sometidas a fuerzas internas de rozamiento, incompresible y homogéneo (es decir, con densidad constante) queda modelizado por el problema incompresible de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \times (0,T) \quad (*) \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0,T) \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \quad (3)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega \quad (4)$$

La primera de las ecuaciones, llamada **ecuación de equilibrio de momentos** o **ley de conservación de la cantidad de movimiento**, es una consecuencia de la segunda Ley de Newton. En ella, el primer y tercer término provienen de derivar respecto de la variable t a lo largo de las trayectorias; el término ∇p se debe a la existencia de fuerzas superficiales de tensión, mientras que la presencia del término $\nu \Delta \mathbf{u}$ denota que nuestro fluido es viscoso, (si fuese $\nu=0$, se diría que nuestro fluido es **ideal**); por último, el segundo miembro, indica la existencia de un campo de fuerzas externas que actúa sobre el fluido.

La ecuación (2) constituye la llamada **condición de incompresibilidad** y, en nuestro caso, es consecuencia de la **ley de conservación de la masa**; nos dice que el volumen ocupado por el fluido permanece constante en todo $\Omega \times (0,T)$.

La condición de contorno (3) tiene un significado físico evidente: debido a la presencia de fuerzas viscosas, el fluido se adhiere a las paredes sólidas del dominio; si éstas están en reposo, la velocidad sobre la frontera de nuestro dominio debe ser nula (recuérdese el comentario que hacíamos sobre el perfil parabólico de velocidades en la entrada del canal). Naturalmente, si alguna de las paredes se mueve con una velocidad \mathbf{v} , la condición anterior debe ser sustituida por la igualdad $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ sobre dicha pared.

Por último, puesto que nuestro problema es evolutivo, necesitamos de una condición inicial de tipo de (4), donde \mathbf{u}_0 es un campo de velocidades inicial conocido.

RESULTADOS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Con objeto de enunciar resultados de existencia y unicidad para este problema, vamos a introducir una formulación débil equivalente. Para ello, utilizaremos los siguientes espacios funcionales:

(*) $[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i = \sum_{j=1, n} u_j (\partial u_i / \partial x_j)$

$$a) \quad \mathcal{D}(\Omega) = \left\{ \varphi / \varphi \in C^\infty(\Omega), \text{ sop } \varphi \subset \Omega \right\},$$

$$b) \quad H^1(\Omega) = \left\{ v / v \in L^2(\Omega), \nabla v \in L^2(\Omega)^n \right\}, \text{ es un espacio de Hilbert para la norma}$$

$$\|v\|_{H^1} = \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$c) \quad H_0^1(\Omega) = \text{la adherencia de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ en } H^1(\Omega); \text{ en } H_0^1(\Omega), \text{ la seminorma}$$

$$\|v\|_{H_0^1} = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}$$

es de hecho una norma equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$.

$$d) \quad \mathcal{V} = \left\{ \varphi / \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^n, \text{div } \varphi = 0 \text{ en } \Omega \right\}$$

$$e) \quad V = \text{la adherencia de } \mathcal{V} \text{ en } H_0^1(\Omega)^n; V \text{ está dotado con el producto escalar y la norma de } H_0^1(\Omega)^n, \text{ que llamaremos respectivamente } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ y } \|\cdot\|.$$

$$f) \quad H = \text{la clausura de } \mathcal{V} \text{ en } L^2(\Omega)^n; H \text{ está dotado con el producto escalar y la norma de } L^2(\Omega)^n, \text{ que llamaremos respectivamente } (\cdot, \cdot) \text{ y } \|\cdot\|.$$

$$g) \quad b(u, v, w) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i D_i v_j w_j dx$$

y

$$\hat{b}(u, v, w) = \frac{1}{2} (b(u, v, w) - b(u, w, v))$$

para todo $u, v, w \in H^1(\Omega)^n$.

Se verifican las siguientes propiedades para V y H :

$$V = \left\{ v / v \in H_0^1(\Omega)^n, \text{div } v = 0 \text{ en } \Omega \right\}$$

$$H = \left\{ v / v \in L^2(\Omega)^n, \text{div } v = 0 \text{ en } \Omega, v \cdot n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}$$

$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookleftarrow V'$ con inyecciones compactas y densas gracias a que Ω es acotado; por esto, el producto de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$, puede considerarse como una extensión del producto escalar en H .

Por otra parte, usando el Teorema de De Rham, obtenemos que V' puede identificarse con el espacio cociente

$$V' \equiv H^{-1}(\Omega)^n / \nabla L^2(\Omega)$$

(donde $H^{-1}(\Omega)^n$ es el dual de $H_0^1(\Omega)^n$), lo que nos permitirá el que, a partir de la formulación débil de nuestro problema, una vez conocida la velocidad, la presión quede determinada salvo una constante aditiva.

Con todo, procediendo de la forma usual, es decir, multiplicando la ecuación (1) por una función test, integrando en Ω y aplicando las fórmulas de integración por partes, la formulación débil del problema de Navier-Stokes queda como sigue:

Dados $u_0 \in H$ y $f \in L^2(0,T; V')$

encontrar $u \in L^2(0,T; V) \cap L^\infty(0,T; H)$ tal que

$$(du(t)/dt, v) + \nu \langle u(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v) \quad (5)$$

$$\forall v \in V, t \text{ c.p.d. en } (0, T)$$

$$u(0) = u_0 \quad (6)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

La pertenencia a $L^2(0,T; V)$ significa a su vez, en el modelo que la energía cinética del fluido va a estar acotada en todo el intervalo $(0,T)$; por otra parte, el que u pertenezca a L^∞ se traduce físicamente en el hecho de que la pérdida de dicha energía asociada a la presencia de fuerzas viscosas, es finita.

Asimismo, conviene señalar que la condición inicial $u(0) = u_0$ tiene sentido, dentro de esta formulación débil, ya que, si $u \in L^2(0,T; V) \cap L^\infty(0,T; H)$ satisface (5), entonces, considerada como una función de $[0,T]$ en V' , u es continua y (6) puede entenderse (e.g.) como una igualdad en V' .

Respecto al problema anterior, tenemos un resultado, debido a Hopf, que nos dice que (5)-(6) posee solución, siendo ésta única en el caso $n=2$.

Si, además, f, u_0 y Ω son “suficientemente regulares”, entonces la función generalizada (vectorial) $(x,t) \rightarrow u(t)(x)$ es tal que, para alguna otra función p (escalar), el par (u,p) es una solución clásica de (1)-(4).

APROXIMACION NUMERICA

Cuando se intenta resolver el problema (1)-(4), nos encontramos con varias dificultades importantes como son:

- Se trata de un sistema (no una ecuación) en el que las incógnitas son las n componentes de la velocidad y la presión.
- Las incógnitas no son independientes ya que (u_1, u_2, \dots, u_n) están ligadas por la condición de incompresibilidad.

- El problema es no lineal, debido a la presencia del término $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, que aparece en la ecuación de equilibrio de momentos.
- Para $n=3$ no hay resultados de unicidad. Se trata de un problema abierto desde 1938 en que fue advertido por Leray y puede que, para viscosidades pequeñas, existan soluciones “turbulentas” que presenten grandes oscilaciones.

Todas estas dificultades hacen que las soluciones exactas sólo hayan podido obtenerse en algunos casos muy concretos y siempre estacionarios, como p.e. para el movimiento de un fluido viscoso engendrado por la rotación de un disco plano inmerso en el mismo y que gira alrededor de su eje (T. Kármán, 1921), o el de un fluido que se mueve entre dos paredes planas que forman un ángulo entre ellas (fluido de Poiseuille) (G. Hamel, 1916). Este hecho justifica plenamente la importancia de buscar algoritmos de resolución numérica, que nos permitan obtener soluciones aproximadas de nuestras ecuaciones.

Esta aproximación se lleva a cabo en dos etapas: en una primera etapa se discretiza en tiempo y, posteriormente, los (sub) problemas elípticos que resultan son aproximados en espacio.

Existen muchos esquemas clásicos y que aparecen de una forma natural para llevar a cabo la discretización en tiempo. Expondremos a continuación dos a modo de ejemplo. Consideraremos para ello el intervalo $[0, T]$ dividido en N subintervalos de amplitud k ,

$$k = T/N \quad (*) \quad (7)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\mathbf{f}^m = \frac{1}{k} \int_{(m-1)k}^{mk} f(t) \, dt \quad m=1 \dots N \quad \mathbf{f}^m \in L^2(\Omega)^n \quad (8)$$

En cada esquema definiremos recursivamente, para cada k , una familia de pares de funciones $(\mathbf{u}_k^o, p_k^o), \dots, (\mathbf{u}_k^N, p_k^N)$ donde (\mathbf{u}_k^m, p_k^m) es una aproximación de (\mathbf{u}, p) en el instante mk , comenzando ambos con

$$\mathbf{u}_k^o \equiv \mathbf{u}_o. \quad (9)$$

1) Esquema totalmente explícito

Para $m \geq 0$, obtenemos $(\mathbf{u}_k^{m+1}, p_k^{m+1})$ de (\mathbf{u}_k^m, p_k^m) resolviendo el problema lineal:

(*) Supondremos el paso k de discretización en tiempo constante, aunque un análisis similar puede hacerse utilizando paso variable.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (\mathbf{u}_k^{m+1} - \mathbf{u}_k^m) - \nu \Delta \mathbf{u}_k^m + (\mathbf{u}_k^m \cdot \nabla) \mathbf{u}_k^m + \nabla p^{m+1} &= \mathbf{f}^{m+1} \quad \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_k^{m+1} &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ \mathbf{u}_k^{m+1} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

Este esquema, una vez formulado en forma generalizada, nos permitiría obtener \mathbf{u}_k^{m+1} de \mathbf{u}_k^m sin más que despejar, si no fuera porque la condición de incompresibilidad lo dificulta ligeramente. Se trata pues de un problema sencillo de resolver. El inconveniente que tiene este esquema es, sin embargo, que hace falta tomar un paso k muy pequeño para obtener soluciones aproximadas estables, además, de una precisión moderada, de primer orden.

2) Esquema de Crank-Nicholson

Para $m \geq 0$, obtenemos $(\mathbf{u}_k^{m+1}, p_k^{m+1})$ de (\mathbf{u}_k^m, p_k^m) resolviendo el problema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (\mathbf{u}_k^{m+1} - \mathbf{u}_k^m) - \nu \Delta [(\mathbf{u}_k^{m+1} + \mathbf{u}_k^m)/2] + (\mathbf{u}_k^m \cdot \nabla) [(\mathbf{u}_k^{m+1} + \mathbf{u}_k^m)/2] \\ + \nabla p_k^{m+1} = \mathbf{f}^{m+1} \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (11)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_k^{m+1} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$\mathbf{u}_k^{m+1} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

Este esquema sigue siendo lineal, ahora la precisión obtenida es de segundo orden, pero de nuevo es necesario tomar un paso k pequeño para que el esquema sea estable.

Como alternativa a estos esquemas podemos pensar en otros que conserven la no linealidad del problema original, esperando de esta forma conseguir mejores aproximaciones sin necesidad de tener que utilizar un paso demasiado pequeño. Este es precisamente el objetivo de nuestro trabajo, en el que presentamos dos algoritmos que constituyen una modificación de otros, dados por R. Glowinski et al. en 1980, cuya convergencia no había sido estudiada hasta ahora.

Ambos esquemas pertenecen a la clase de los métodos de direcciones alternadas, el primero de ellos del tipo de Peaceman-Rachford (de dos pasos intermedios) y el segundo del tipo de Strang (con tres pasos intermedios).

Para describirlos, notemos en primer lugar que el problema inicial (1)-(4) equivale a este otro

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (13)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T) \quad (14)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega \quad (15)$$

Lo que hemos hecho es introducir en la ecuación (12) el término no lineal $\frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{u}$ que en el contexto de nuestro problema, no afecta para nada a su resolución, puesto que \mathbf{u} verifica la condición de incompresibilidad. De esta forma, sin embargo, se consigue una mayor simetría en el término no lineal que será de utilidad en las demostraciones de los resultados de convergencia.

Consideremos de nuevo el intervalo de tiempo $[0, T]$ dividido en N subintervalos de amplitud k , y un parámetro θ perteneciente al intervalo $(0, 1)$, que nos servirá para dar peso a la condición de incompresibilidad y a la no linealidad. Para la descripción de los algoritmos, con objeto de simplificar la notación, suprimiremos el índice k .

ALG 1 Describiremos primero un método de direcciones alternadas del tipo de Peaceman-Rachford. Definimos las funciones $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^{1/2}, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{N-1/2}, \mathbf{u}^N$, como sigue:

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0; \quad (16)$$

después, dado $m \geq 0$ y $\mathbf{u}^m \in H_0^1(\Omega)^n$, calculamos la solución $(\mathbf{u}^{m+1/2}, p^{m+1/2})$ de

$$\begin{aligned} & \frac{2}{k}(\mathbf{u}^{m+1/2} - \mathbf{u}^m) - \nu \Delta(\theta \mathbf{u}^{m+1/2} + (1-\theta)\mathbf{u}^m) + \nabla p^{m+1/2} \\ &= \mathbf{f}^{m+1/2} - \left\{ (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}^m) \mathbf{u}^m \right\} \quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{m+1/2} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$\mathbf{u}^{m+1/2} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

y calculamos una solución \mathbf{u}^{m+1} de

$$\begin{aligned} & \frac{2}{k}(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^{m+1/2}) - \nu \Delta(\theta \mathbf{u}^{m+1/2} + (1-\theta)\mathbf{u}^{m+1}) \\ & + (\mathbf{u}^{m+1} \cdot \nabla)((1-\theta)\mathbf{u}^{m+1} + \theta \mathbf{u}^{m+1/2}) \\ & + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}^{m+1})((1-\theta)\mathbf{u}^{m+1} + \theta \mathbf{u}^{m+1/2}) = \mathbf{f}^{m+1} + \nabla p^{m+1/2} \quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{m+1} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$\mathbf{u}^{m+1} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

En (17) y (18), $\mathbf{f}^{m+\frac{1}{2}}$ está dada por

$$\mathbf{f}^{m+\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{k} \int_{(m+\frac{i-1}{2})k}^{(m+\frac{i}{2})k} \mathbf{f}(x,t) \, dt \quad \text{para } i=1,2.$$

El error de discretización local de este algoritmo es de primer orden en k . Desarrollamos un segundo algoritmo, del tipo de Strang, en el cual se introduce un paso intermedio más.

ALG 2 Definimos ahora las funciones $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^{\frac{1}{4}}, \mathbf{u}^{\frac{3}{4}}, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{N-\frac{1}{4}}, \mathbf{u}^N$, como sigue:

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0; \quad (19)$$

después, dados $m \geq 0$ y $\mathbf{u}^m \in H_0^1(\Omega)^n$, calculamos la solución $(\mathbf{u}^{m+\frac{1}{4}}, p^{m+\frac{1}{4}})$ de

$$\begin{aligned} & \frac{4}{k}(\mathbf{u}^{m+\frac{1}{4}} - \mathbf{u}^m) - \nu \Delta(\theta \mathbf{u}^{m+\frac{1}{4}} + (1-\theta) \mathbf{u}^m) + \nabla p^{m+\frac{1}{4}} \\ &= \mathbf{f}^{m+\frac{1}{4}} - \left\{ (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m + \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}^m) \mathbf{u}^m \right\} \quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (20)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\mathbf{u}^{m+\frac{1}{4}} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

calculamos una solución $\mathbf{u}^{m+\frac{3}{4}}$ de

$$\begin{aligned} & \frac{2}{k}(\mathbf{u}^{m+\frac{3}{4}} - \mathbf{u}^{m+\frac{1}{4}}) - \nu \Delta(\theta \mathbf{u}^{m+\frac{1}{4}} + (1-\theta) \mathbf{u}^{m+\frac{3}{4}}) \\ &+ (\mathbf{u}^{m+\frac{3}{4}} \cdot \nabla)((1-\theta) \mathbf{u}^{m+\frac{3}{4}} + \theta \mathbf{u}^{m+\frac{1}{4}}) \\ &+ \frac{1}{2}(\operatorname{div} \mathbf{u}^{m+\frac{3}{4}})((1-\theta) \mathbf{u}^{m+\frac{3}{4}} + \theta \mathbf{u}^{m+\frac{1}{4}}) \\ &= \mathbf{f}^{m+\frac{3}{4}} + \nabla p^{m+\frac{1}{4}} \quad \text{en } \Omega \end{aligned} \quad (21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{m+\frac{3}{4}} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$\mathbf{u}^{m+\frac{3}{4}} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

y finalmente calculamos la solución $(\mathbf{u}^{m+1}, p^{m+1})$ de

$$\begin{aligned} \frac{4}{k}(\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^{m+3/4}) - \nu \Delta(\theta \mathbf{u}^{m+1} + (1-\theta)\mathbf{u}^{m+3/4}) + \nabla p^{m+1} \\ = \mathbf{f}^{m+1} - \left\{ (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^{m+3/4} + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}^m) \mathbf{u}^{m+3/4} \right\} \text{ en } \Omega \end{aligned} \quad (22)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{m+1} = 0 \quad \text{en } \Omega$$

$$\mathbf{u}^{m+1} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

En (20)-(22), hemos usado la siguiente notación:

$$\mathbf{f}^{m+3/4}(x) = \frac{2}{k} \int_{(m+\frac{1}{4})k}^{(m+\frac{3}{4})k} \mathbf{f}(x, t) \, dt,$$

$$\mathbf{f}^{m+i/4}(x) = \frac{4}{k} \int_{(m+\frac{i-1}{4})k}^{(m+\frac{i}{4})k} \mathbf{f}(x, t) \, dt \quad \text{para } i=1,4.$$

Obviamente cada $\mathbf{u}^{m+i/j}$ es, al menos formalmente, una aproximación de $\mathbf{u}(\cdot, (m+i/j)k)$.

Vemos, como decíamos al principio, que el parámetro θ acompaña en ambos algoritmos, a la función con divergencia nula; de esta manera, hacerlo variar entre 1 y 0 equivale en cierto modo a dar mayor o menor importancia a la condición de incompresibilidad.

Es fácil comprobar que el error local es también de primer orden en k .

Observamos cómo la discretización en tiempo ha reducido la tarea, en ambos casos, a resolver una serie de problemas elípticos de dos tipos, en cada uno de los cuales ha desaparecido una de las dos dificultades, la no linealidad o la incompresibilidad, anteriormente mencionadas. Así, tendremos:

a) Problemas lineales del tipo de Stokes que pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega \quad (*) \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

b) Problemas elípticos quasi-lineales (donde se ignora la incompresibilidad), tales como

(*) Un problema de Stokes es una aproximación del problema de Navier-Stokes para viscosidades grandes, ya que en este caso el término no lineal tiende a desaparecer.

$$\begin{aligned} \mu^* \Delta \mathbf{u} + \lambda^* \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{u} &= \mathbf{g}^* \quad \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

En (23) y (24), μ , μ^* , λ y λ^* son parámetros positivos y \mathbf{g} , $\mathbf{g}^* \in L^2(\Omega)^n$. Estos parámetros y funciones vienen determinados por ν , κ , m , θ y el algoritmo seleccionado.

El problema (23) posee solución única, y (24) posee al menos una solución, que será única en el caso de tomar un paso de discretización k suficientemente pequeño (para la demostración de estas afirmaciones, cf. Marín⁷).

La siguiente etapa será aproximar estos problemas en las variables espaciales. Existen muchas formas de aproximarlos en espacio (en Marín⁷ esta aproximación se realiza en un marco general, imponiendo sólo ciertas hipótesis, llamadas de consistencia); aquí, a modo de ejemplo, consideraremos una aproximación particular que utiliza la técnica de los elementos finitos.

Por simplicidad, supongamos que Ω es un dominio poligonal. Sea $\mathcal{H} = (0,1]$ y sea $\{\mathcal{T}_h/h \in \mathcal{H}\}$ una familia regular de triangulaciones de Ω ; es decir, si denotamos por $\delta(T)$ al diámetro de la menor bola que contiene a T y por $\rho(T)$ al diámetro de la mayor bola contenida en T entonces supondremos

$$\delta(T) \leq h \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall h \text{ y}$$

$$\delta(T)/\rho(T) \leq \sigma \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall h.$$

Nos referiremos primero al problema (23) que puede escribirse también como sigue:

$$\mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{u} \in V \quad (25)$$

En el caso $n=2$, para cada $h \in \mathcal{H}$, definimos:

$$W_h = \left\{ \mathbf{w}_h / \mathbf{w}_h \in C^0(\bar{\Omega})^2, \mathbf{w}_h|_T \in P_2(T)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \mathbf{w}_h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\} \quad (26)$$

$$V_h = \left\{ \mathbf{v}_h / \mathbf{v}_h \in W_h, \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (27)$$

Es bien conocido que W_h es un subespacio finito dimensional de $H_0^1(\Omega)^2$. Una función $\mathbf{w}_h \in W_h$ está unívocamente determinada por sus valores en los vértices y puntos medios de los ejes de \mathcal{T}_h que pertenecen a Ω (ver figura 4). Si definimos la forma bilineal $\alpha(\cdot, \cdot)$ por

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (28)$$

entonces el problema discretizado es

$$\alpha(u_h, v_h) = (g, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, u_h \in V_h \quad (29)$$

Obviamente, (29) posee exactamente una solución u_h . Puesto que V_h viene dado por (27), deberán existir algunos λ_T , $T \in \mathcal{T}_h$, tales que

$$\alpha(u_h, w_h) = (g, w_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \lambda_T \left(\int_T \operatorname{div} w_h \, dx \right) \quad \forall w_h \in W_h \quad (30)$$

Es evidente que existe una función escalonada,

$$\pi_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \pi_h(T) \cdot \lambda_T \quad (31)$$

tal que se verifica

$$\alpha(u_h, w_h) - (\pi_h, \operatorname{div} w_h) = (g, w_h) \quad \forall w_h \in W_h \quad (32)$$

que no es sino la versión discretizada de (23), escrita como ecuación variacional, i.e. en la forma:

$$\alpha(u, w) - (p, \operatorname{div} v) = (g, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^n \quad (33)$$

Así, π_h puede ser considerada una aproximación de p , que quedará completamente determinada por sus valores $\pi_h(T)$ con $T \in \mathcal{T}_h$ (ver figura 4).

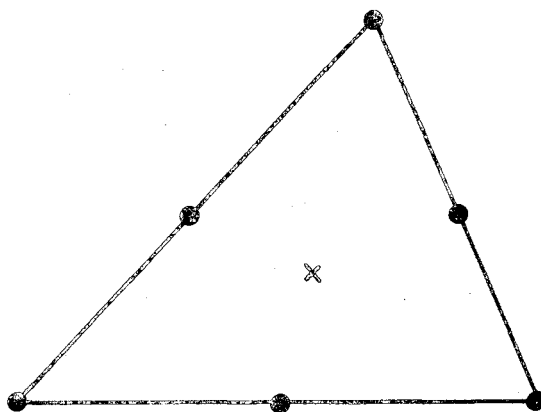


Figura 4. Elemento finito P_2, P_0 (Fortin)

Puede probarse que para u suficientemente regular, se tiene que $\|u - u_h\| = 0(h)$ (ver Témam⁹).

Por otra parte, el problema (24) puede escribirse en la forma

$$\alpha(u, v) + \hat{b}(u, u, v) = (g, v) \quad (34)$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^n, u \in H_0^1(\Omega)^n$$

La aproximación de (24) puede deducirse de (34) y de la definición del espacio W_h . El problema discretizado es aún no lineal. Más tarde, haremos algunos comentarios sobre su resolución efectiva.

Observamos, que los resultados numéricos tienen apariencia realista (esto ocurre incluso para problemas industriales, de gran magnitud, en donde intervienen gran cantidad de variables; cf. por ejemplo Bristeau¹). A continuación, presentamos los resultados de convergencia y estabilidad obtenidos, que vienen a justificar plenamente la bondad de los datos numéricos.

Nos centraremos en el primero de los algoritmos ALG 1, (para los resultados relativos a ALG 2, puede consultarse Marín⁷).

Para cada $k = \Delta t$ y cada h de $(0, 1]$ definimos las funciones u_{kh} , v_{kh} , \tilde{u}_{kh} y \tilde{v}_{kh} como sigue:

$$u_{kh}, v_{kh} : [0, T] \rightarrow W_h$$

$$\text{Constantes en cada intervalo } [mk, (m+1)k) \quad (35)$$

$$u_{kh}(t) = u_h^m \text{ y } v_{kh}(t) = u_h^{m+1/2} \quad \forall t \in [mk, (m+1)k) \quad (*)$$

$$\tilde{u}_{kh}, \tilde{v}_{kh} : [0, T] \rightarrow W_h$$

$$\text{Continuas y lineales en cada } [mk, (m+1)k) \quad (36)$$

$$\tilde{u}_{kh}(mk) = u_h^m \text{ y } \tilde{v}_{kh}(mk) = u_h^{m+1/2} \quad \forall m = 0, 1, \dots, N$$

En estas hipótesis, podemos enunciar el siguiente

Teorema Si $\theta \in (0, 1/2]$ entonces existe una constante $e_0^{(**)}$ que depende sólo de

$$\Omega, T, \|u_0\|, \|f\|_{L^2(0, T; V)}, \nu, \theta, \sigma$$

(*) Por $u_h^{m+1/2}$ estamos denotando la correspondiente aproximación en espacio de $u^{m+1/2}$.

(**) El cálculo explícito de e_0 puede encontrarse en Marín⁷.

tal que, si k y h satisfacen

$$k/h^2 \leq e_0, \quad (37)$$

se tiene:

a) Existen $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, $\mathcal{K}' \rightarrow 0$ y $\{k'\} \rightarrow 0$ para los cuales las subsucesiones $u_{k',h'}$, $v_{k',h'}$, $\tilde{u}_{k',h'}$ y $\tilde{v}_{k',h'}$ convergen fuertemente en $L^2(\Omega \times (0,T))^n$, débilmente en $L^2(0,T; H_0^1(\Omega)^n)$ y débilmente $*$ en $L^\infty(0,T; L^2(\Omega)^n)$ hacia la misma función u .

b) Si \mathcal{K}' y $\{k'\}$ satisfacen a), entonces el límite común u es una solución (generalizada) del problema de Navier-Stokes.

c) Consecuentemente, para $n=2$, las sucesiones completas $u_{kh}, \dots, \tilde{v}_{kh}$ convergen hacia la (única) solución.

d) Finalmente, si $n=2$, $\theta \in (0, 1/2)$ y h y k satisfacen

$$k/h^2 \rightarrow 0 \quad (38)$$

entonces las sucesiones $u_{kh}, \dots, \tilde{v}_{kh}$ son fuertemente convergentes en $L^2(0,T; H_0^1(\Omega)^n)$.

Demostración. La demostración de este teorema se realiza en varias etapas.

1.^a etapa: Algunas estimaciones “a priori” sobre las funciones $u_{kh}, \dots, \tilde{v}_{kh}$.

2.^a etapa: Una estimación uniforme para la transformada de Fourier \hat{v}_{kh} de la función \tilde{v}_{kh} que asegura una cota de \tilde{v}_{kh} para la norma de $H^\beta(0,T; L^2(\Omega)^n)$ ($\beta < 1/4$).

3.^a etapa: Elección de subsucesiones convergentes (gracias a las estimaciones “a priori”, la compacidad de las inyecciones $H^1 \hookrightarrow H^\beta \hookrightarrow L^2$ y las hipótesis de consistencia verificadas por la aproximación espacial).

4.^a etapa: Demostración de que el límite común es una solución.

5.^a etapa: Resultados de convergencia fuerte.

A continuación desarrollaremos brevemente cada una de las etapas que acabamos de mencionar.

1.^a etapa: De las ecuaciones que describen nuestro algoritmo, usando el hecho de que $\theta \leq 1/2$ y $k/h^2 \leq e_0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \max_m \|u_h^m\|_{L^2} + \sum_m \|u_h^{m+1/2} - u_h^m\|_{L^2}^2 + \sum_m \|u_h^{m+1} - u_h^{m+1/2}\|_{L^2}^2 \\ + k \sum_m \|u_h^m\|_{H_0^1}^2 + k \sum_m \|u_h^{m+1/2}\|_{H_0^1}^2 \leq \text{cte.}, \end{aligned} \quad (39)$$

donde la constante es independiente de k, h y m . De aquí, resulta:

$$\|u_{kh}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \|u_{kh}\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^n)}^2 \leq \text{cte.} \quad (40)$$

$$\|u_{kh} - v_{kh}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 \leq k, \text{ cte;}$$

lo mismo obtendríamos para v_{kh} , \tilde{u}_{kh} y \tilde{v}_{kh} .

Esto nos dice que nuestro esquema es **condicionalmente estable** (para obtener estimaciones "a priori" ha sido necesario imponer ciertas restricciones entre los parámetros de discretización en espacio y tiempo).

2.ª etapa: De nuevo, de las ecuaciones, obtenemos la siguiente expresión:

$$2 \frac{d}{dt} (\tilde{v}_{kh}(t), v) = \langle g_{kh}(t), v \rangle_h \quad (41)$$

$$\forall v \in V_h, t \text{ c.p.d. en } [0, T],$$

$$\text{con } \|g_{kh}\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega)^n)} \leq \text{cte.}$$

Prolongando g_{kh} por 0 fuera de $[0, T]$ y tomando transformadas de Fourier en (41) obtenemos:

$$2\pi |\tau| \|\hat{v}_{kh}(\tau)\|_{L^2}^2 \leq \|\hat{g}_{kh}(\tau)\|_h \|\hat{v}_{kh}(\tau)\|_h + C \|\hat{v}_{kh}(\tau)\|_{L^2}$$

y, de aquí,

$$|\tau| \|\hat{v}_{kh}(\tau)\|_{L^2}^2 \leq \text{cte.} \|\hat{v}_{kh}(\tau)\|_h \quad (42)$$

Además, para $\beta \in (0, 1/4)$ se verifica:

$$|\tau|^{2\beta} \leq C(\beta) \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\beta}} \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (43)$$

De (42) y (43), resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\beta} \|\hat{v}_{kh}(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq C_1(\beta) \|\hat{v}_{kh}\|_{L^2(\mathbb{R}; (L^2)^n)}^2$$

$$+ C_2(\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{v}_{kh}\|_h / (1 + |\tau|^{1-2\beta}) d\tau \leq \text{cte.}$$

y, de aquí, obtenemos:

$$\|\tilde{v}_{kh}\|_{H^\beta(0,T;L^2(\Omega)^n)} \leq \text{cte.} \quad (44)$$

3.^a etapa: De las estimaciones de las etapas anteriores se deduce la existencia de subsucesiones $u_{k'h'}$, $v_{k'h'}$, $\tilde{u}_{k'h'}$ y $\tilde{v}_{k'h'}$ y de una función $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^n) \cap H^\beta(0,T;L^2(\Omega)^n)$ tal que dichas subsucesiones convergen hacia u cuando k' y $h' \rightarrow 0$ en los siguientes sentidos:

débilmente - * en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)$

débilmente en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^n)$

débilmente en $H^\beta(0,T;L^2(\Omega)^n)$ y

fuertemente y c.p.d. en $L^2(\Omega \times (0,T))^n$

De todas estas convergencias, quizás la menos evidente a partir de las estimaciones anteriores, sea la última, ésta se deduce sin más que tener en cuenta las hipótesis de consistencia verificadas por nuestra aproximación espacial.

Además, se obtiene que el límite es el mismo para todas ellas, gracias a las relaciones existentes entre cada dos parejas de familias obtenidas en la primera de las etapas.

4.^a etapa: El próximo paso consiste en demostrar que el límite u es solución. Se deduce fácilmente de las etapas previas que este límite u satisface:

$$a) \quad u \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$$

$$(du/dt) \in L^\sigma(0,T;V') \text{ con } \sigma=4/3 \text{ si } n=3 \text{ y } \sigma=2 \text{ si } n=2.$$

$$b) \quad \left(\frac{du}{dt}(t), v \right) + \nu \langle u(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = (f(t), v)$$

$$\forall v \in \mathcal{V} \quad t \text{ c.p.d. en } [0,T]$$

(por densidad, esta ecuación variacional también se verifica para todo v de V). Esta igualdad la hemos obtenido tomando límite en las igualdades verificadas por las funciones aproximadas, teniendo en cuenta las propiedades de convergencia de la 3.^a etapa.

Por último, no es difícil probar que u verifica también la condición inicial (6).

5.^a etapa: Para demostrar la convergencia fuerte tenemos en cuenta que, en el caso $n=2$, se verifica la llamada igualdad de la energía:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|u(T)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1}^2 dt \\
& = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^T (f(t), u(t)) dt
\end{aligned}
\tag{45}$$

que nos dice que la energía cinética correspondiente al instante final más la pérdida de dicha energía debido a la presencia de fuerzas de viscosidad, coincide con la energía cinética correspondiente al instante inicial más el trabajo realizado por las fuerzas exteriores.

Teniendo en cuenta esta igualdad y, con objeto de probar la convergencia fuerte en $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^n)$, introducimos la expresión:

$$X_{kh} = \|u_h^N - u(T)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_{kh} \nu \int_0^T \|w_{kh} - u_h^+\|_{H_0^1}^2 dt + Y_{kh},$$

donde:

- * $w_{kh} : [0, T] \rightarrow W_h$ es una función constante en cada $[mk, (m+1)k]$ definida por $w_{kh}(mk) = \theta u_h^{m+1/2} + (1-\theta)u_h^m$,
- * $u_h^+ : [0, T] \rightarrow W_h$ con $u_h^+ \in L^2(0, T; W_h)$ y tal que

$$\|u - u_h^+\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^n)} \rightarrow 0 \tag{46}$$

Se verifica que, dada $u \in L^2(0, T; V)$, existe siempre una función u_h^+ con las propiedades precedentes (cf. Témam⁹).

- * α_{kh} es una sucesión de parámetros positivos que convergen a 1 cuando k y h tienden a cero.
- * Y_{kh} es una expresión convenientemente elegida, como veremos más adelante.

Si desarrollamos X_{kh} , obtenemos:

$$X_{kh} = X_{kh}^1 + X_{kh}^2 + X_{kh}^3,$$

donde

$$\begin{aligned}
X_{kh}^1 &= \|u(T)\|_{L^2}^2 + 2\alpha_{kh} \nu \int_0^T \|u_h^+(t)\|_{H_0^1}^2 dt \\
&\rightarrow \|u(T)\|_{L^2}^2 - 2\nu \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1}^2 dt
\end{aligned}$$

$$X_{kh}^2 = -2(u_h^N, u(T))_{L^2} - 4\alpha_{kh} \nu \int_0^T (w_{kh}(t), u_h^+(t))_{H_0^1} dt \\ - 2\|u(T)\|_{L^2}^2 - 4\nu \int_0^T \|u(t)\|_{H_0^1}^2 dt$$

$$X_{kh}^3 = Y_{kh} + \|u_h^N\|_{L^2}^2 + 2\alpha_{kh} \nu \int_0^T \|w_{kh}(t)\|_{H_0^1}^2 dt$$

Basta, pues, elegir Y_{kh} adecuadamente para que:

$$a) \quad Y_{kh} \geq 0,$$

$$b) \quad X_{kh}^3 \leq Z_{kh} \rightarrow \|u_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^T (f(t), u(t)) dt$$

Con ello conseguiremos que $X_{kh} \rightarrow 0$ y, de aquí,

$$\int_0^T \|w_{kh}(t) - u_h^+(t)\|_{H_0^1}^2 dt \rightarrow 0 \quad (47)$$

Teniendo en cuenta (46), concluimos que

$$\|w_{kh}(t) - u\|_{L^2(0,T;H_0^1)} \rightarrow 0 \quad (48)$$

y, utilizando (40), llegaremos a las mismas propiedades de convergencia para u_{kh} , v_{kh} , \tilde{u}_{kh} y \tilde{v}_{kh} .

Observación 1. La condición $k/h^2 \leq e_0$ es una condición suficiente de estabilidad, usual para problemas parabólicos no lineales. Nos dice, en esencia, que, una vez fijado un pequeño paso de discretización en espacio, el paso de discretización en tiempo no puede ser demasiado grande. Para otros esquemas de discretización en espacio, es decir para otros espacios W_h , se obtienen condiciones de estabilidad similares, de la forma

$$k/h^q \leq \text{cte.} \quad \text{con } q \geq 1$$

Observación 2. En el caso tridimensional no hay resultados de convergencia fuerte, en principio debido a que no se verifica la igualdad de la energía (que ha servido como base en nuestra demostración). Además, la no unicidad de solución impide un resultado de convergencia para las sucesiones completas.

Observación 3. Las técnicas de demostración utilizadas están basadas en métodos de compacidad clásicos, y, en resultados de Témam (1977) para esquemas más simples. Para algunos resultados parciales, véanse los trabajos previos F. Cara - Marín^{3, 4, 5}.

Observación 4. Se han obtenido resultados análogos para el segundo de los algoritmos con otra constante e_0 para la correspondiente condición de estabilidad; la demostración, algo más compleja puede encontrarse en Marín⁷.

Observación 5. Claramente, ALG 2 es, en la práctica, casi tan económico de usar como ALG 1. Por otra parte, el estudio detallado de algoritmos análogos a ALG 1 y ALG 2 aplicados a un problema modelo sencillo (cf. Bristeau¹) parece indicar que ALG 2 está mucho mejor adaptado a la determinación de soluciones para grandes valores de t y, en particular, al cálculo de soluciones estacionarias.

RESOLUCION EFECTIVA DE LOS PROBLEMAS

Comentaremos a continuación los métodos numéricos de resolución de los problemas lineales y quasi-lineales obtenidos en cada paso de ALG 1 y ALG 2. Por simplicidad, nos limitaremos a trabajar sobre los problemas (23) y (24). El desarrollo que sigue puede adaptarse sin dificultad a los problemas discretizados correspondientes.

Resolución de los problemas quasi-lineales

El problema (24) no proviene de ningún problema del Cálculo de Variaciones, puesto que no existe ningún funcional sobre $H_0^1(\Omega)^n$ cuya diferencial coincida con

$$(v, \nabla)v + \frac{1}{2}(\operatorname{div} v)v$$

Sin embargo, usando una formulación conveniente en el sentido de los mínimos cuadrados, vamos a ser capaces de resolver (24) mediante métodos propios de la Programación no lineal.

Así, dada $v \in H_0^1(\Omega)^n$, definimos $y (=y(v)) \in H_0^1(\Omega)^n$ como la única solución de

$$-\mu \Delta y + \lambda y = -\mu \Delta v + \lambda v + (v, \nabla)v + \frac{1}{2}(\operatorname{div} v)v - g \quad \text{en } \Omega \quad (49)$$

$$y = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

Observamos que y se obtiene de v resolviendo n problemas de Dirichlet lineales independientes (uno para cada componente de y).

Obsérvese que si v es solución del problema no lineal (24), entonces la correspondiente función y , obtenida a través de (49), es 0. Por ello, parece natural introducir la siguiente formulación de tipo mínimos cuadrados del problema (24):

$$\text{"Buscar } u \in H_0^1(\Omega)^n \text{ tal que:} \quad (50)$$

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^n \text{"}.$$

Aquí, $J: H_0^1(\Omega)^n \rightarrow R$ está definida por

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \mu |\nabla y|^2 + \lambda |y|^2 \} \, dx, \quad (51)$$

con y definida (a partir de v) resolviendo el problema lineal (49). Los problemas (50) y (24) son equivalentes en el sentido siguiente: Si u es solución de (24), también lo es de (50), con $J(u) = 0$; y, recíprocamente, si u es solución de (50) y $J(u) = 0$, entonces es también solución de (24).

Para resolver el problema de minimización (50) usamos un algoritmo de tipo gradiente conjugado, definido como sigue

Paso 0 Inicialización:

$$u^0 \in H_0^1(\Omega)^n \text{ dado;} \quad (52)$$

a partir de u^0 , calculamos $g^0 \in H_0^1(\Omega)^n$ resolviendo

$$\langle -\mu \Delta g^0 + \lambda g^0, z \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle J'(u^0), z \rangle \quad (53)$$

$$\forall z \in H_0^1(\Omega)^n, (*)$$

y hacemos

$$w^0 = g^0 \quad (54)$$

Después, dados $m \geq 0$, u^m , g^m y w^m , calculamos u^{m+1} , g^{m+1} y w^{m+1} en la forma siguiente:

Paso 1 Descenso:

$$u^{m+1} = u^m - \lambda_m w^m, \quad (55)$$

(*) $J'(\cdot)$ es el gradiente de $J(\cdot)$.

donde λ_m es solución del problema de minimización unidimensional

$$\lambda_m \in R, J(u^m - \lambda_m w^m) \leq J(u^m - \lambda w^m) \quad \forall \lambda \in R_+. \quad (56)$$

Paso 2 Construcción de una nueva dirección de descenso:

Calculamos $g^{m+1} \in H_0^1(\Omega)^n$, resolviendo

$$\begin{aligned} \langle -\mu \Delta g^{m+1} + \lambda g^{m+1} \rangle_{H^{-1}, H_0^1} &= \langle J'(u^{m+1}), z \rangle \\ \forall z \in H_0^1(\Omega)^n, \end{aligned} \quad (57)$$

En Marín⁷ puede encontrarse una expresión integral para $\langle J'(u^m), z \rangle$.

Posteriormente, tomamos (variante de Polak-Ribière):

$$\gamma_m = \frac{\lambda \int_{\Omega} g^{m+1} (g^{m+1} - g^m) dx + \mu \int_{\Omega} \nabla g^{m+1} \cdot \nabla (g^{m+1} - g^m) dx}{\lambda \int_{\Omega} |g^m|^2 dx + \mu \int_{\Omega} |\nabla g^m|^2 dx}$$

y, finalmente,

$$w^{m+1} = g^{m+1} - \gamma_m w^m. \quad (58)$$

Cambiamos m por $m+1$ y volvemos a (55).

Los dos pasos no triviales del algoritmo (52) - (58) son:

- (i) La resolución del problema de minimización en una variable (56); el correspondiente λ_m puede calcularse de forma aproximada (por un método de dicotomía o mediante el método de Fibonacci; cf. e.g. Rao⁸) o bien de manera exacta, sin más que calcular las raíces de una ecuación algebraica de tercer grado (en efecto, la función $J(u^m - \lambda w^m)$ es polinómica de cuarto grado). Por otra parte, como ya dijimos, en cada paso hemos de resolver n problemas de Dirichlet lineales asociados al operador elíptico $(\lambda Id - \mu \Delta)$ para, dado v , obtener la correspondiente función y (prob. (49)).

- (ii) El cálculo de \mathbf{g}^m a partir de \mathbf{u}^m requiere la resolución de $2n$ problemas lineales de Dirichlet del tipo anterior. De ellos, n servirán para calcular $\langle J'(\mathbf{u}^m), \mathbf{z} \rangle$ y los restantes n para obtener propiamente \mathbf{g}^m mediante (57).

Obsérvese que, para una división uniforme del intervalo $[0, T]$, los parámetros λ y μ son independientes de m . En consecuencia, la elección de una aproximación particular en las variables espaciales reduce los mencionados problemas de Dirichlet para $(\lambda Id - \mu \Delta)$ a sistemas lineales de ecuaciones **donde la matriz de los coeficientes es siempre la misma**. Parece, pues, adecuada una factorización de Cholesky para dicha matriz (al principio del programa) y limitar los cálculos a la resolución de sistemas triangulares. Por el contrario, si el método de discretización en la variable t es de paso variable, la resolución de los sistemas lineales que provienen de los problemas de Dirichlet para $(\lambda Id - \mu \Delta)$ resulta costosa por métodos directos (ahora μ depende de m). Una alternativa interesante consiste en utilizar algoritmos de tipo relajación.

Resolución de los problemas de tipo quasi-Stokes

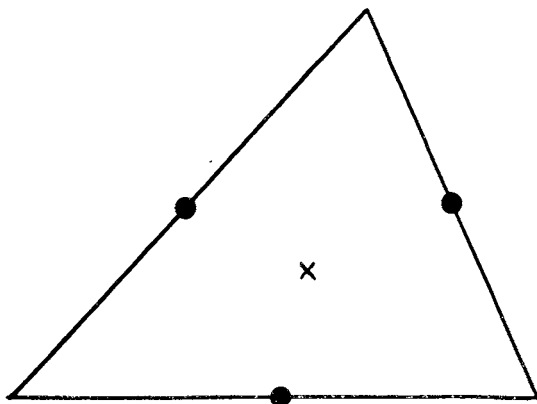


Figura 5. Elemento P_1 —no conforme, P_0 (Thomasset)

La resolución del problema (23) puede llevarse a cabo de dos maneras. En el caso de que sea posible calcular una base explícita de V_h , basta resolver (29) por un método directo, ya que se trata de resolver un sistema algebraico cuya matriz es simétrica y

definida positiva. Esto ocurre, p.e., cuando usamos el elemento finito no conforme de Thomasset (cf. la figura 5). En este caso, se tiene:

$$W_h = \left\{ w_h / w_h \in L^2(\Omega)^n; \ w_h|_T \in P_1(T)^n \ \forall T \in \mathcal{T}_h; w_h \text{ continua en baricentros} \right. \\ \left. \text{de caras adyacentes; } w_h|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$V_h = \left\{ v_h / v_h \in W_h; \ \sum_{i=1, n} D_{ih} v_{ih} = 0 \right\} \quad (D_{ih} v_h = D_i v_h \text{ c.p.d.})$$

Crouzeix², calculó una base explícita de V_h en el caso $n=2$.

Desafortunadamente, nos encontramos con que no es fácil en general, hallar una base de V_h ; esto sugiere resolver el problema (23) mediante un método iterado, del tipo de Uzawa o Arrow-Hurwicz. Una ventaja de la utilización de un método de este tipo es la obtención de una aproximación $p_h^{m+1/2}$ en ALG 1, (resp. $p_h^{m+1/4}, p_h^{m+1}$ en ALG 2) para la presión p en el tiempo $(m+1/2)k$ (resp. $(m+1/4)k$ y $(m+1)k$). Aquí, nos referiremos exclusivamente al algoritmo de Uzawa.

Comenzaremos con una función dada

$$p^0 \in L^2(\Omega). \quad (59)$$

Después, conocido p^m , definimos u^m y p^{m+1} ($m \geq 0$) mediante:

$$\lambda^* u^m - \mu^* \Delta u^m = g - \nabla p^m \quad \text{en } \Omega, \quad (60)$$

$$u^m = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

$$p^{m+1} = p^m - \varphi \nabla \cdot u^m. \quad (61)$$

Se supone que $\varphi > 0$ es un escalar dado. Acerca de la convergencia del algoritmo (59) - (61), tenemos el resultado siguiente:

Teorema Supongamos que

$$0 < \varphi < 2 \frac{\mu^*}{n}. \quad (62)$$

Entonces, cualquiera que sea $p^0 \in L^2(\Omega)$ se verifica:

$$u^m \rightarrow u \text{ fuertemente en } H_0^1(\Omega)^n,$$

$$p^m \rightarrow p \text{ fuertemente en } L^2(\Omega),$$

donde $\{u, p\}$ es la única solución de (23) que verifica

$$\int_{\Omega} p \, dx = \int_{\Omega} p^0 \, dx. \quad (63)$$

(Para la demostración, véase Glowinski⁶, p. 303).

En cada paso del algoritmo (59) - (61) deben resolverse, de nuevo, n problemas de Dirichlet independientes para $(\lambda^* Id - \mu^* \Delta)$. Si se toma $\theta = 1/2$ (resp. $\theta = 2/3$) en ALG 1 (resp. ALG 2), se sigue que $(\lambda Id - \mu \Delta) = (\lambda^* Id - \mu^* \Delta) = (\frac{2}{k} Id - \frac{\nu}{2} \Delta)$ (resp. $(\lambda Id - \mu \Delta) = 2(\lambda^* Id - \mu^* \Delta) = (\frac{4}{k} Id - \frac{2\nu}{3} \Delta)$), con lo cual muchos de los subprogramas pueden utilizarse tanto para los subproblemas lineales como para los no lineales, reduciendo así memoria y tiempo de programación.

Los resultados expuestos son generalizables al caso de condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas (paredes deslizantes, entrada de flujo, etc.) y/o condiciones naturales homogéneas o no (salida de flujo, tracción, etc.). Para detalles, cf. Glowinski⁶, Marín⁷.

REFERENCIAS

1. M.O. Bristeau y J. Periaux. "Finite Element methods for the calculation of compressible viscous flows using self-adaptive mesh refinements". *Rapport de Recherche INRIA*, (aparecerá).
2. M. Crouzeix y P.A. Raviart. "Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations". *RAIRO, Serie Anal. Núm. 3*, 33-76, (1973).
3. E. Fernández-Cara y M. Marín. "The convergence of a numerical method of solution of the Navier-Stokes equations". *Internacional Symposium on Numerical Analysis*, Madrid, Sep., (1985).
4. E. Fernández-Cara y M. Marín. "Análisis numérico de varios algoritmos para la resolución de las ecuaciones de N-S". *II Simposium sobre Aplicaciones del M.E.F., en Ingeniería*. Barcelona, Junio, (1986).
5. E. Fernández-Cara y M. Marín. "The convergence of two numerical schemes for the N-S equations". Pendiente de publicación.
6. R. Glowinski. *Numerical methods for nonlinear variational problems*. 2.^a Ed. Springer-Verlag, (1984).
7. M. Marín. *Análisis numérico del problema incompresible de N-S: métodos de tipo direcciones alternadas*. Tesis, Universidad de Sevilla, Octubre, (1986).
8. S.S. Rao. *Optimization Theory and applications*. Wiley Eastern Limited, (1979).
9. R. Teman. *Theory and numerical analysis of the N-S equations*. 2.^a Ed. North-Holland, Amsterdam, (1977).